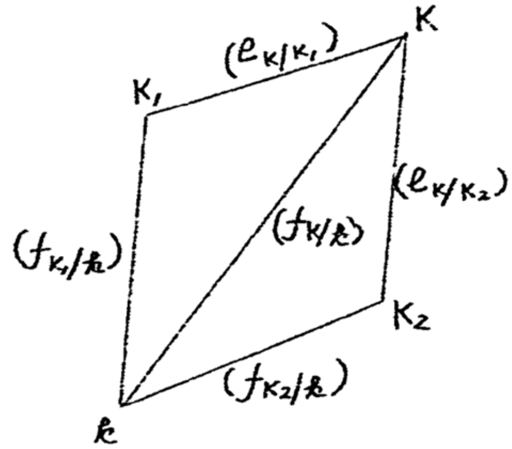
495. 『整数論ノ一問題ニ就テ』

河田　敬義（東大學生）

kヲ有限次代數体, K_1, K_2ヲkノ有限次擴大体デ, $K_1 \cap K_2 = k$トシ, K_1, K_2ノ *Kompositum* ヲKトスル。K, K_1, K_2及ビkノ *Hauptordnung* ヲ夫々$\mathfrak{O}_K, \mathfrak{O}_{K_1}, \mathfrak{O}_{K_2}$及ビ$\mathfrak{o}$トシ$\mathfrak{O}_K$ノ *Primideal* ヲ$\mathfrak{P}_K$, $\mathfrak{O}_{K_1}, \mathfrak{O}_{K_2}$, $\mathfrak{o}$ニ於テ$\mathfrak{P}_K$デワレル *Primideal* ヲ夫々$\mathfrak{P}_{K_1}$, $\mathfrak{P}_{K_2}$, $\mathfrak{p}$トシ, $N_{K/k} = \mathfrak{p}^{f_{K/k}}$, $\mathfrak{P}_K^{e_{K/K_1}} \| \mathfrak{P}_{K_1}$トイフヤウニ次數分岐指數ヲ表ハスコトニスル。



目標ハ$\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$ナルタメノ必要充分條件ヲモトメルコトデアル。

〔A〕『$\mathfrak{O}_K/\mathfrak{P}_K = (\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2})/\mathfrak{P}_K$

$$= (\mathfrak{O}_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (\mathfrak{O}_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f = \frac{f_{K_1/k} \cdot f_{K_2/k}}{(f_{K_1/k}, f_{K_2/k})}$$

トオケバ $f_{K/k} = f$ ナルコトデアル』

（証明） $\mathfrak{O}_K \geqq \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$ ヨリ

$$\mathfrak{O}_K / \mathfrak{P}_K \geqq \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_K \text{ ---------- } (2)$$

又 $\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2} / \mathfrak{P}_K \geqq (\mathfrak{O}_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}) \cdot (\mathfrak{O}_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2})$ ------- (3)

トナル。

今 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ ノ元ノ數ヲ q トスレバ，$\mathfrak{O}_K/\mathfrak{P}_K$ ノ元ノ數ハ $q^{f_{K/k}}$ 等デアルカラ (2) (3) ヨリ

$$GF(q^{f_{K/k}}) \geqq GF(q^{f_{K_1/k}}) \cdot GF(q^{f_{K_2/k}})$$
$$= GF(q^{f}) \text{ ------- } (4)$$

トナル。故ニ $f = f_{K/k}$ ト (2) (3) ノ $\geqq$ ガ $=$ トナルコトハ äquivalent デアル。

（注意） (3) ノ左辺カラ右辺ニウツスコトハ，左辺ニテ Restklasse ノ代表トシテアラハレル $\mathfrak{O}_{K_1}$ ノ元ヲ $\mathfrak{O}_{K_1}/\mathfrak{P}_{K_1}$ ノ Restklasse ヘ，$\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ元ヲ $\mathfrak{O}_{K_2}/\mathfrak{P}_{K_2}$ ノ Restklasse ニオキカヘル。

Homomorphismus ガ得ラレル。故ニ (3) ガ等号ノ成立ツコトハ，コレガ Isomorphismus デアルコトヲ示ス。コノ場合左辺ノ Nullklasse ノ元ハ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i$，$\mathfrak{p}_{K_1}/\alpha_i$ 又ハ $\mathfrak{p}_{K_2}/\beta_i$；$(i = 1, \text{------} r,)\ \alpha_i \in \mathfrak{O}_{K_1},\ \beta_i \in \mathfrak{O}_{K_2},)$ トイフ形ニアラハサレル。

〔B〕 K ノ $\mathfrak{P}_K$-adische Erweiterung ヲ $K_{\mathfrak{p}_K}$ トシ，コヽデ $\mathfrak{O}_K$ ノ $\mathfrak{p}_K$-adische Grenzmenge ヲ $(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K}$ 等

デ表ハスコトニスル。

『$(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K}=(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K}\ \left(=(\mathfrak{O}_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}}\cdot(\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}}\right)$ ......(5)

ナルタメノ必要充分條件ハ

$$f_{K/k}=f,\ \text{及ビ}\ \ e_{K/K_1}=1\ \ \text{又ハ}\ \ e_{K/K_2}=1$$

ナルコトデアル』

(証明) 充分ナルコトハ (1) 式ノ成立ト $\mathfrak{p}_K/\!/\pi_K$ ナル π_K ガ $\mathfrak{O}_{K_1}$ 又ハ $\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ中ニトレルコトヨリ (5) ノ最初ノ等式ヲ得ル。

第二ノ等式ハ一般ニ成立ツ。即:

$$(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K}=(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}}$$
$$=(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}})\cdot(\mathfrak{O}_{K_2}\cdot\mathfrak{O}_{\mathfrak{g}})=(\mathfrak{O}_{K_1})_{\mathfrak{p}_{K_1}}\cdot(\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_{K_2}}\ \text{......(6)}$$

トナル。

必要ナルコトハ (5) ノ Einheit ヲ考ヘレバ (1) ガ成立チ $f=f_{K/k}$ トナル, 又最小ノ Bewertung ヲ與ヘル元ヲトレバ, $\mathfrak{p}_K/\!/\pi_K$ ナル π_K ガ $\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ 中ニモトメラレルコトカラ. [A] ノ (注意) ニヨリ、カヽル π_K ハ $\mathfrak{O}_{K_1}$ 又ハ $\mathfrak{O}_{K_2}$ ノ中ニ求メラレネバナラナクナル。故ニ $e_{K/K_1}=1$ 又ハ $e_{K/K_2}=1$ ヲ得ル。

(注意) (6) 式ヨリ (3) デ常ニ等号ノ成立ツコトガワカル。故ニ (1) ノ最後ノ等式ノ條件トハ何モ関係シナイ。

[C] 『 $\mathfrak{O}_K=\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2}$ ....(7)

ナルタメノ必要充分條件ハ $\mathfrak{O}_K$ ノスベテノ Primideal $\mathfrak{p}_K$ ニツイテ

$$(\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K}=(\mathfrak{O}_{K_1}\cdot\mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K}\ \text{..............(8)}$$

ナルコトデアル』

（証明）必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトハ $\mathfrak{f} = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_K^{(i)}$ トスレバ

$K \times k_{\mathfrak{f}} \cong K_{\mathfrak{p}_K^{(1)}} + \cdots\cdots + K_{\mathfrak{p}_K^{(g)}}$ デアルカラ（$\times$, $+$ ハ直積及ビ直和）

$(\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}) \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}} \cong (\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K^{(1)}} + \cdots\cdots + (\mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2})_{\mathfrak{p}_K^{(g)}}$

(8) ヨリ $= (\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K^{(1)}} + \cdots\cdots + (\mathfrak{O}_K)_{\mathfrak{p}_K^{(g)}} \cong (\mathfrak{O}_K) \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{f}}$ トナリ

E. Noether ノ *Modulsatz** ヨリ (7) ガ成立スル。

（**E. Noether: Zerfallenende verschränkte Produkte und ihre Maximalordnungen; actualités* ...., 1934. S. 11. §II. *Hilfssatz* 及ビ脚註）

〔D〕『$\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$ ナルタメノ必要充分條件ハ

$$(D_{K/K_1}, D_{K/K_2}) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

及ビ $\mathfrak{p}_K / (D_{K_1/k}, D_{K_2/k}) \cdots\cdots (10)$

ナルスベテノ $\mathfrak{p}_K$ ニ對シテ

$$f = f_{K/k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

トナルコトデアル。』

但シ D_{K/K_1} 等ハ K カラ K_1 ヘノ *Relativdiskriminant* 等ヲ表ハスモノトスル。

〔E〕『$\mathfrak{O}_K = \mathfrak{O}_{K_1} \cdot \mathfrak{O}_{K_2}$ ナルタメノ充分條件ハ

$$(D_{K_1/k}, D_{K_2/k}) = 1 \cdots\cdots (12)$$

ナルコトデアル』

（D, E ノ証明）〔D〕ハ $\mathfrak{p}_K$ ヲ (10) ナルモノニ限ラズ $\mathfrak{O}_K$ ノ

スベテノ *Primideal* ニワタルナラバ〔B〕〔C〕ノ直接ノ結果デアル。

(10) 以外ノ k_K デハ (11) ノ成立ツコト，及ビ (12) ヨリ (9) ヲ得ルコトハ

M. Moriya: Über einen Satz von Herbrand 北大理學部紀要 *Ser. I. vol. IV. 1936.* ヨリワカル。——

〔E〕ハ D. *Hilbert: Zahlbericht Satz 88*, 及ビソノ拡張。

K: Asano: *Zur Diskriminante einer Algebra* (数學輯報 Vol. XII, 1935) ノ §2. *Satz 6* デアル。

——(終)——